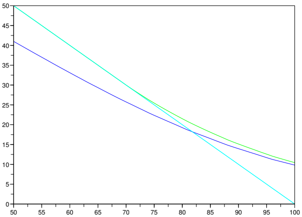
Temps d'arrêt, Arrêt optimal

RECRUTEMENT OPTIMAL, OPTIONS AMÉRICAINES

Bernard Lapeyre

http://cermics.enpc.fr/~bl



Plan

1. Temps d'arrêt
2. Arrêt optimal
3. Option américaine
4. Preuve du théorème
5. Un problème de recrutement
6. (bio et biblio)graphie

Processus de Markov

- *Processus de Markov* et *propriété de Markov*

$$P\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\right) \\ = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\right).$$

- la matrice de transition : $(P(x,y), x, y \in E)$

$$P(x,y) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = y | X_n = x\right).$$

- Loi de $(X_0, \dots, X_N)$ déterminée par P et la loi de X_0 (notée μ_0).

$$\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\right) = \mu_0(x_0)P(x_0,x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1},x_n).$$

- Loi de X_N, μ_N donnée par $\mu_N = \mu_0 P^N$.

LOI DE X_n : UNE AUTRE FAÇON D'ÉCRIRE LES CHOSES

- $(X_n, n \geq 0)$ chaîne de Markov de matrice de transition P sur E.
- $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1 \quad$ (i.e. $\mu_0(x_0) = 1$, $\mu_0(x) = 0$ si $x \neq x_0$.)
- On sait exprimer $\mathbb{E}(f(X_N))$

$$\mathbb{E}(f(X_N)) = \mu_N f = \mu_0 P^N f = \sum_{x \in E} \mu_0(x)(P^N f)(x) = (P^N f)(x_0).$$

Une formulation alternative plus algorithmique.

Theorem 1

Soit $(u(n,x), n = 0, \ldots, N, x \in E)$ *la solution unique de*

$$(1) \qquad \begin{cases} u(n,x) = \sum_{y \in E} P(x,y) u(n+1,y), & n < N \\ u(N,x) = f(x), \end{cases}$$

Alors $\mathbb{E}(f(X_N)) = u(0, x_0)$.

Remarques

- La première équation de (1) peut aussi s'écrire

$$u(n,x) = P[u(n+1,.)](x) = \sum_{y \in E} P(x,y)u(n+1,y)$$

- $u(n,x)$ peut s'interpréter comme

$$u(n,x) = \overbrace{P \times \cdots \times P}^{N-n \text{ fois}} f(x) = P^{N-n} f(x),$$

- Lorsque $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$, on a

$$u(n,x) = \mathbb{E}\left(f(X_N) | X_n = x\right) = P^{N-n} f(x).$$

Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_N = x_N) \\ = \mathbb{P}(X_0 = x_0)P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_n, x_{n+1}) \times P(x_{n+1}, x_{n+2}) \times \cdots \times P(x_{N-1}, x_N)\end{aligned}$$

en sommant sur toutes les valeurs de $x_0, \cdots, x_{n-1}$ et $x_{n+1}, \cdots, x_{N-1}$ on obtient la loi de (X_n, X_N)

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, X_N = x_N) = \mathbb{P}(X_n = x_n) P^{N-n}(x_n, x_N)$$

$$\mathbb{E}\left(f(X_N)\mathbf{1}_{\{X_n = x_n\}}\right) = \mathbb{P}(X_n = x_n) \sum_{x_N \in E} P^{N-n}(x_n, x_N) f(x_N) = \mathbb{P}(X_n = x_n)(P^{N-n} f)(x_n)$$

Remarques et notations

- (1) est *une équation de programmation dynamique* [1]
- E est fini, (1) est un *algorithme* qui termine.

Une notation commode "à la `Scilab`"

- $x_{0:n}$ plutôt que $(x_0, \ldots, x_n)$
- $X_{0:n}$ plutôt que $(X_0, \ldots, X_n)$
- $X_{0:n} = x_{0:n}$ plutôt que $(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$

[1] Sur l'origine du terme programmation dynamique voir [Dreyfus(2002)]. "It was something not even a congressman could object to" selon Bellman.

PREUVE FORMELLE

On le sait déjà ... mais voici une autre méthode de preuve. On va montrer que

$$\mathbb{E}\left(u(n+1, X_{n+1})\right) = \mathbb{E}\left(u(n, X_n)\right).$$

Si cela est vrai :

$$u(0, x_0) = \mathbb{E}\left(u(0, X_0)\right) = \cdots = \mathbb{E}\left(u(N, X_N)\right) = \mathbb{E}\left(f(X_N)\right).$$

La loi de $X_{0:n+1} = (X_{0:n}, X_{n+1})$ est donnée par (c'est un façon d'exprimer la propriété de Markov)

$$\mathbb{P}\left(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}\right) = \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(u(n+1, X_{n+1})\right) &= \sum_{x_{0:n+1} \in E^{n+2}} u(n+1, x_{n+1}) \mathbb{P}\left(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}\right), \\
&= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}, x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}), \\
&= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}} \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) \sum_{x_{n+1} \in E} P(x_n, x_{n+1}) u(n+1, x_{n+1}), \\
&= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}} \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) u(n, x_n) = \mathbb{E}\left(u(n, X_n)\right).
\end{aligned}$$

LA QUESTION DU JOUR

- $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur E. $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$.
- On cherche à calculer non pas $\mathbb{E}(f(X_N))$, mais $\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}(f(X_\tau))$.
- τ appartenant à une famille de temps aléatoires, *plus grande* que les temps déterministes, mais *plus petite* que tous les temps aléatoires.
- *plus grande* que les temps déterministes : parce que l'on souhaite pouvoir tenir compte des valeurs de X_n au fil du temps.
- *plus petite* que tous les temps aléatoires : parce que à l'instant n on ne connait pas la trajectoire future $X_{n+1}, \ldots, X_N$.
- $\tau = \text{Argmax}\{f(X_n), 0 \leq n \leq N\}$ est optimum, mais réclame de connaitre le futur!
- Voir Pour la Sciences [Hill(2009)] pour une introduction à ce genre de problème.

Temps d'arrêt

La notion adéquate est celle de *temps d'arrêt* : on souhaite prendre la décision d'arrêter avec l'information que l'on a au temps n.

Definition 2

τ est un *temps d'arrêt*, si, pour tout n, il existe $A_n \subset E^{n+1}$ tel que

$$\{\tau = n\} = \{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in A_n\}$$

- "Je peux déterminer si $\tau = n$ en ne considérant que la portion de trajectoire avant n".
- $\text{Argmax}\{f(X_n), 0 \leq n \leq N\}$ ne peut pas être un temps d'arrêt (sauf cas particulier).
- Le temps d'atteinte d'un point z de E est un temps d'arrêt

$$\tau = \inf \{n \geq 0, X_n = z\}.$$

En effet $\{\tau = n\} = \{X_0 \neq z, X_1 \neq z, \ldots, X_{n-1} \neq z, X_n = z\}$.

Formulation d'un problème d'arrêt optimal

- On se donne une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur E, de matrice de transition P, issue de x_0 en 0.
- $f(n,x)$ donné, on cherche à calculer le sup suivant

$$\sup_{\tau \text{ t.a.} \leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau))$$

- et aussi à identifier un τ qui réalise ce sup.
- ... on sait répondre complétement à ces deux questions.

Les données : P, x_0, f.

Solution du problème d'arrêt optimal

Theorem 3

Si $(u(n,x), n = 0, \ldots, N, x \in E)$ *est la solution unique de*

$$(2) \quad \begin{cases} u(n,x) = \max\left\{\sum_{y\in E} P(x,y)u(n+1,y), f(n,x)\right\}, n < N, x \in E \\ u(N,x) = f(N,x), x \in E. \end{cases}$$

Alors

- $\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau)) = u(0, x_0)$
- $\tau_0 = \inf\{n \geq 0, u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$ *est un temps d'arrêt optimal.*

- Lorsque la matrice de transition dépend de n il faut remplacer P par P_n (la matrice de transition entre les instants n et $n+1$) dans l'équation.
- τ_0 est bien un temps d'arrêt $\leq N$.

$$\{\tau_0 = n\} = \{u(0, X_0) \neq f(0, X_0), \ldots, u(n-1, X_{n-1}) \neq f(n-1, X_{n-1}), u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$$

- Preuve formelle du théorème : transparent 18.

Commentaires

- (2) est une équation de *programmation dynamique* proche de celle qui permet de calculer $\mathbb{E}(f(X_N))$.
- $u(n,x) = \sup_{n\leq\tau\leq N} \mathbb{E}(f(\tau, X_\tau)|X_n = x)$.
- Preuve informelle ("Principe d'optimalité") :

  En n, si $X_n = x$ soit j'exerce en n et je gagne $f(n,x)$ soit j'attends $n+1$ où je peux gagner $u(n+1, X_{n+1})$, dont je dois calculer l'espérance en n sachant que $X_n = x$ qui est donnée par

$$\sum_{y\in E} P(x,y)u(n+1,y).$$

- On l'utilise (2) pour écrire un algorithme (pas beaucoup plus compliqué (il suffit de rajouter le $\max$) que celui qui permet de calculer $\mathbb{E}(f(X_N))$). Voir TD.

1 Temps d'arrêt

2 Arrêt optimal

3 Option américaine

4 Preuve du théorème

5 Un problème de recrutement

6 (bio et biblio)graphie

Exemple 1: Calcul du prix d'options américaines

- $(X_n, 0 \leq n \leq N)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P décrivant l'évolution des prix des actifs (e.g. modèle de Cox-Ross).
- J'ai la possibilité si j'"exerce" en $n \leq N$ de gagner $f(n, X_n)$.
- Que vaut ce droit et à quel moment dois-je exercer ce droit pour maximiser mon gain ?
- Pour calculer le prix (i.e. la valeur de ce droit), il est naturel[2] de chercher à maximiser l'espérance du flux $\mathbb{E}(f(\tau, X_\tau))$ parmi tous les temps d'arrêt de X.

[2] pour une justification compléte cf. cours de Mathématiques Financière (2A) ou [Lamberton and Lapeyre(1997)].

PROBLÈME CLASSIQUE : PUT AMÉRICAIN

- On cherche à calculer $\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}\left(f(\tau, X_\tau)\right)$, le prix de l'option et à determiner le moment d'exercice optimum.
- $(X_n, 0 \leq n \leq N)$ est le processus de Cox-Ross

$$X_0 = 1, X_{n+1} = X_n \left(u\mathbf{1}_{\{U_{n+1} = P\}} + d\mathbf{1}_{\{U_{n+1} = F\}}\right).$$

$(U_n, n \geq 1)$ une suite de tirage à pile ou face indépendant,

$$0 \leq p \leq 1, \quad \mathbb{P}(U_n = P) = p = 1 - \mathbb{P}(U_n = F).$$

- r le taux d'intérêt sur une période, K le strike, $d < 1 + r < u$.

$$f(n, x) = \frac{1}{(1+r)^n}(K - x)_+$$

SOLUTION

- On commence par calculer (cf TD) $(u(n,x), n = 0, \ldots, N, x \in E)$ la solution de l'équation (2) du théorème 3, ici

$$(3) \quad \begin{cases} u(n,x) = \max\left(p\, u(n+1, xu) + (1-p)\, u(n+1, xd), \dfrac{(K-x)_+}{(1+r)^n}\right), \\ u(N,x) = \dfrac{(K-x)_+}{(1+r)^N}. \end{cases}$$

- Souvent on calcule $v(n,x) = (1+r)^n u(n,x)$ plutot que $u(n,x)$.

$$\begin{cases} v(n,x) = \max\left(\dfrac{p\, v(n+1, xu) + (1-p)\, v(n+1, xd)}{1+r}, (K-x)_+\right), \\ v(N,x) = (K-x)_+. \end{cases}$$

- $u(0,x) = v(0,x) = \sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}\left(f(\tau, X_\tau)\right)$
- τ_0 le temps d'arrêt optimal

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \inf\left\{n \geq 0, u(n, X_n) = (K - X_n)_+/(1+r)^n\right\} \\ &= \inf\left\{n \geq 0, v(n, X_n) = (K - X_n)_+\right\}. \end{aligned}$$

1 Temps d'arrêt

2 Arrêt optimal

3 Option américaine

4 Preuve du théorème

5 Un problème de recrutement

6 (bio et biblio)graphie

Preuve du théorème 3 : τ temps d'arrêt quelconque

- u solution (2), on va voir que, pour tout τ t.a., $\mathbb{E}\left(u\left(n \wedge \tau, X_{n\wedge\tau}\right)\right)$ **décroît en** n.
- En admettant ceci, on obtient

$$
\begin{aligned}
u(0,x_0) &= \mathbb{E}\left(u(0,X_0)\right) = \mathbb{E}\left(u\left(0 \wedge \tau, X_{0\wedge\tau}\right)\right) \\
&\geq \mathbb{E}\left(u\left(N \wedge \tau, X_{N\wedge\tau}\right)\right) = \mathbb{E}\left(u\left(\tau, X_\tau\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(f\left(\tau, X_\tau\right)\right).
\end{aligned}
$$

  Ce qui permet d'obtenir $\sup_{0\leq\tau\leq N,\text{t.a.}} \mathbb{E}\left(f\left(\tau, X_\tau\right)\right) \leq u(0,x_0)$.
- Pour montrer la décroissance annoncée, on remarque que

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \mathbb{E}\left(u\left((n+1)\wedge\tau, X_{(n+1)\wedge\tau}\right)\right) - \mathbb{E}\left(u(n\wedge\tau, X_{n\wedge\tau})\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(u(n+1, X_{n+1}) - u(n, X_n)\right)\mathbf{1}_{\{\tau \geq n+1\}}\right].
\end{aligned}
$$

Preuve du théorème 3 : τ temps d'arrêt quelconque

- τ est un temps d'arrêt, $\{\tau \geq n+1\} = \{\tau \leq n\}^c$, s'écrit sous la forme
$$\{\tau \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}.$$
- La loi de $(X_{0:n}, X_{n+1})$ est donnée par (c'est la propriété de Markov)
$$\mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \mathbb{E}\left[\left(u(n+1, X_{n+1}) - u(n, X_n)\right) \mathbf{1}_{\left\{X_{0:n} \in \bar{A}_n\right\}}\right], \\
&= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}_n, x_{n+1} \in E} \left(u(n+1, x_{n+1}) - u(n, x_n)\right) \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}), \\
&= \sum_{x_{0:n} \in \bar{A}_n} \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) \left(\sum_{x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) P(x_n, x_{n+1}) - u(n, x_n)\right).
\end{aligned}$$

u sol. de (2), $\sum_{x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) P(x_n, x_{n+1}) \leq u(n, x_n)$, d'où $\Delta_{n+1} \leq 0$.

PREUVE DU THÉORÈME 3 : τ_0 TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL

- $\tau_0 = \inf\{n \geq 0, u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$.
- On va montrer que $\mathbb{E}\left(u\left(n \wedge \tau_0, X_{n\wedge\tau_0}\right)\right)$ **est constant en** n (i.e. $\Delta_{n+1} = 0$).
- En admettant ceci, il est facile de conclure

$$\begin{aligned} u(0, x_0) &= \mathbb{E}\left(u(0, X_0)\right) = \mathbb{E}\left(u\left(0 \wedge \tau_0, X_{0\wedge\tau_0}\right)\right), \\ &= \mathbb{E}\left(u\left(N \wedge \tau_0, X_{N\wedge\tau_0}\right)\right) = \mathbb{E}\left(u\left(\tau_0, X_{\tau_0}\right)\right), \end{aligned}$$

  Mais, par définition de τ_0, $u\left(\tau_0, X_{\tau_0}\right) = f\left(\tau_0, X_{\tau_0}\right)$, donc

$$u(0, x_0) = \mathbb{E}\left(f\left(\tau_0, X_{\tau_0}\right)\right).$$

- Ce qui finit la démonstration puisque τ_0 réalise alors le sup.
- Il nous reste à montrer que, pour ce temps d'arrêt $\Delta_{n+1} = 0$.

Preuve du théorème 3 : τ_0 temps d'arrêt optimal

- τ_0 est un temps d'arrêt, $\{\tau_0 \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in \bar{A}^0_n\}$ où

$$\bar{A}^0_n = \{u(0,x_0) \neq f(0,x_0), \ldots, u(n,x_n) \neq f(n,x_n)\}.$$

- Sur l'événement $\{\tau_0 \geq n+1\}$, on a $u(n,X_n) \neq f(n,X_n)$ et comme u sol. de (2)

$$\sum_{x_{n+1}\in E} u(n+1,x_{n+1})P(X_n,x_{n+1}) = u(n,X_n).$$

- On termine alors comme tout à l'heure, mais en tenant compte de cette égalité :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \mathbb{E}\left[\left(u(n+1,X_{n+1}) - u(n,X_n)\right)\mathbf{1}_{\left\{X_{0:n}\in \bar{A}^0{}_n\right\}}\right], \\
&= \sum_{x_{0:n}\in \bar{A}^0_n, x_{n+1}\in E} \left(u(n+1,x_{n+1}) - u(n,x_n)\right)\mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right)P(x_n,x_{n+1}), \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\left\{X_{0:n}\in \bar{A}^0_n\right\}}\left(\sum_{x_{n+1}\in E} u(n+1,x_{n+1})P(X_n,x_{n+1}) - u(n,X_n)\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

1 Temps d'arrêt

2 Arrêt optimal

3 Option américaine

4 Preuve du théorème

5 Un problème de recrutement

6 (bio et biblio)graphie

Exemple 2: un problème de recrutement

- Je reçois, consécutivement, N candidats à un poste. Les circonstances m'imposent de décider tout de suite du recrutement (soit je recrute la personne que je viens de recevoir, soit je la refuse définitivement).
- La *seule* information que j'ai sur les candidats est leur classement.
- Je souhaite maximiser la probabilité de recruter le meilleur candidat.
- Quelle est la meilleure façon de s'y prendre ?

Le résultat

- Il faut recevoir (environ) 37% des candidats, puis choisir le premier candidat qui suit qui est meilleur que tous les précédents (le dernier si cela n'arrive jamais).
- On obtient ainsi un temps d'arrêt optimal.
- La probabilité d'obtenir le meilleur candidat est (environ) de 37%.
- Les transparents qui suivent expliquent comment arriver à ces résultats à l'aide de la théorie précédente.

Le modèle

- $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ une permutation de $(1, \ldots, N)$.
- ω_k le classement du $\#k$-ième individu dans la permutation.

$$\begin{array}{lcccccc} \textit{Indice} & (\#1 & \#2 & \ldots & \#k & \ldots & \#N) \\ \textit{Rang} & (\omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_k & \ldots & \omega_N) \end{array}$$

- Ω_N l'ensemble des permutations de $(1, \ldots, N)$ muni de la probabilité uniforme.
- B_n l'évenement "le n-ième candidat est le meilleur".
- On cherche un temps d'arrêt τ qui maximise $\mathbb{P}(B_\tau)$.

Où est la chaîne de Markov ?

- Un temps d'arrêt mais pour quel processus de Markov ?
- $R_k(\omega)$ le rang du $\#k$-ième individu parmi les k premiers individus.
- $B_n = \{R_n = 1, R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1\}$.
- Quelle est la loi de $(R_1, \ldots, R_N)$?

UN EXEMPLE DE CALCUL DE R

- $\omega = (2\,3\,1\,4)$ donne $R = (1\,2\,1\,4)$.
- $R = (1\,2\,1\,4)$ donne $\#3 \leq \#1 \leq \#2 \leq \#4$

$$
\begin{array}{rlr}
(1) \to (\#1) & & \#1 \text{ est le premier puisqu'il est tout seul!} \\
(1\,2) \to (\#1 \leq \#2) & & \#2 \text{ est le deuxième parmi les 2 premiers} \\
(1\,2\,1) \to (\#3 \leq \#1 \leq \#2) & & \#3 \text{ est le premier parmi les 3 premiers} \\
(1\,2\,1\,4) \to (\#3 \leq \#1 \leq \#2 \leq \#4) & & \#4 \text{ est le quatrième parmi les 4 premiers}
\end{array}
$$

On obtient la permutation de départ $\omega = (2\,3\,1\,4)$

$$
\begin{array}{ccccc}
\textit{Indice} & (\#1 & \#2 & \#3 & \#4) \\
\textit{Rang} & (2 & 3 & 1 & 4)
\end{array}
$$

En Python

Si vous avez un doute voici, deux fonctions Python qui font le job.

```
import numpy as np

def Omega2R(omega):
# Calcule les rang d'insertion pour un omega donne
  R=np.zeros(np.size(omega), dtype=int)
  # dtype=int, pour specifier que l'on veut un tableau d'entier
  for n in range(np.size(omega)):
    # classe le vecteur omega[1,...,n] en croissant
    y=np.sort(omega[0:n+1]);
    # R[n] = le classement de omega[n] parmi les n premiers
    R[n]=np.where(y==omega[n])[0][0]+1
  return R

def R2Omega(R):
    # Calcule omega connaissant les rangs d'insertion
    iomega=np.zeros(0, dtype=int);
    for n in range(np.size(R)):
        # J'insére n à l'indice R[n]
        iomega=np.concatenate([iomega[0:int(R[n]-1)],[n+1],iomega[int(R[n]-1):n+1]])
    # On inverse la permutation
    omega=np.zeros(np.size(R), dtype=int)
    for n in range(np.size(omega)):
        omega[iomega[n]-1]=n+1
    return omega

Taille=6
omega=np.random.permutation(Taille)+1 # permutation aléatoire
print(omega)
print(R2Omega(Omega2R(omega))) # devrait être égal à omega
```

Calcul de lois

- À un R correspond un et un seul ω, **donc**, pour $\alpha_k \in \{1, \dots, k\}$

$$P\left(R_1 = \alpha_1, \dots, R_N = \alpha_N\right) = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{N!}.$$

- (Par contraction) les R_k suivent des lois uniformes sur $\{1, \dots, k\}$. Elles sont indépendantes.
- $S_k = \mathbf{1}_{\{R_k = 1\}}$ sont aussi des variables aléatoires indépendantes. Elles suivent des lois de Bernouilli de paramêtre $p_k = \mathbb{P}(S_k = 1) = 1/k$.
- La suite de variable $(S_1, \dots, S_N)$ suffira pour traiter le problème.

LE CRITÈRE

- B_n l'évenement "le n-ième candidat est le meilleur".

$$B_n = \{R_n = 1, R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1\} = \{S_n = 1, S_{n+1} = 0, \ldots, S_N = 0\}.$$

- τ un temps d'arrêt par rapport au processus $R = (R_1, \ldots, R_N)$. À l'instant n, $(R_1, \ldots, R_n)$ "contient toute l'information disponible".
- Pour un temps d'arrêt[3] τ, on va voir que

$$\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E}\left(\frac{\tau}{N} S_\tau\right).$$

ce qui permettra de mettre le problème "sous forme markovienne".

[3] Ce n'est plus vrai sinon ... Exercice: trouver un contre-exemple.

PREUVE

$$\{\tau = n\} = \{(R_1, \ldots, R_{n-1}, R_n) \in A_n\} = \{R_{1:n} \in A_n\}.$$

Notation : $R_{1:n} = (R_1, \ldots, R_{n-1}, R_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau = n, B_\tau) &= \mathbb{P}(\tau = n, B_n). \\
&= \mathbb{P}(\tau = n, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1) \\
&= \mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1) \\
&= \mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1)\mathbb{P}(R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1)
\end{aligned}$$

car indépendance des vecteurs $R_{1:n}$ et $R_{n+1:N}$, puis par indépendance des R_n entre eux

$$\mathbb{P}(R_{n+1} > 1, \ldots, R_N > 1) = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n+2} \times \cdots \times \frac{N-1}{N} = \frac{n}{N}$$

PREUVE

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = n, B_\tau) &= \frac{n}{N}\mathbb{P}(R_{1:n} \in A_n, R_n = 1) = \frac{n}{N}\mathbb{P}(\tau = n, R_n = 1)\\ &= \frac{n}{N}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau = n, R_n = 1\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau = n\}}\frac{n}{N}S_n\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau = n\}}\frac{\tau}{N}S_\tau\right).\end{aligned}$$

En sommant pour n variant de 1 à N

$$\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E}\left(\frac{\tau}{N}S_\tau\right).$$

RÉSUMONS NOUS !

- $(S_1, \ldots, S_N)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernouilli $1/k$, **donc** une chaîne de Markov sur l'espace $E = \{0, 1\}$, non homogène, de matrice de transition, dépendant du temps, P_n

$$P_n(0,0) = P_n(1,0) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$P_n(0,1) = P_n(1,1) = \frac{1}{n+1}$$

- On chercher à maximiser $\mathbb{P}(B_\tau) = \mathbb{E}\left(\frac{\tau}{N} S_\tau\right) = \mathbb{E}\left(f(\tau, S_\tau)\right)$ parmi tous les temps d'arrêt.

RÉSOLUTION

- On peut résoudre le problème grâce à (2)
- On calcule (cf TD) $(u(n, 0 \text{ ou } 1), 0 \leq n \leq N)$

$$\begin{cases} u(n,x) = \max\left\{\frac{n}{n+1}u(n+1,0) + \frac{1}{n+1}u(n+1,1), \frac{n}{N}x\right\}, n < N, \\ u(N,x) = x, \end{cases}$$

- Une fois ceci fait, un temps d'arrêt optimal est obtenu par

$$\tau = \inf\left\{n \geq 0, u(n+1, S_n) = \frac{n}{N}S_n\right\}.$$

- Dans ce cas, on peut mener des calculs explicites (voir [Delmas and Jourdain(2006)] et TD) pour obtenir les résultats annoncés.

1 Temps d'arrêt

2 Arrêt optimal

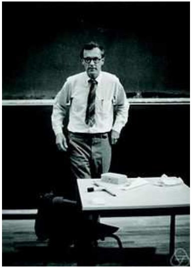
3 Option américaine

4 Preuve du théorème

5 Un problème de recrutement

6 (bio et biblio)graphie

Snell, James Laurie



- La théorie de l'arrêt optimal porte le nom d'enveloppe de Snell (voir [Snell(1952)]), "so named by the Russian mathematician, Kolmogorov".
- Snell (1925-2011), mathématicien américain, élève de Doob.
- Il utilise la théorie des martingales pour traiter le problème d'arrêt optimal.

Bibliographie

Jean-François Delmas and Benjamin Jourdain.
Modèles aléatoires.
Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

Stuart Dreyfus.
Richard bellman on the birth of dynamic programming.
Operations Resarch, 50(1):48–51, 2002.

Theodore Hill.
Savoir quand s'arrêter.
Pour La Science, 381, Juillet 2009.

Damien Lamberton and Bernard Lapeyre.
Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.
Ellipses, Édition Marketing, Paris, second edition, 1997.

J. L. Snell.
Applications of martingale system theorems.
Trans. Amer. Math. Soc., 73:293–312, 1952.